Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, 1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1) Να υπολογίσετε τα αθροίσματα των παρακάτω σειρών

α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k}$ β) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{3^{k-2}}$ γ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{k-1}}$ δ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k+3^k}{4^k}$.

2) Να εξετάσετε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $a_k = \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k}$ β) $a_k = \frac{k^6}{2^k}$ γ) $a_k = (-1)^k \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}$ δ) $a_k = \frac{2k^2+5k+1}{5k^3+6k+2}$

ε) $a_k = \frac{2k^3+5k^2++2k+1}{k^5+2k^3}$ στ) $a_k = \frac{1}{|ka+\beta|}$ όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $ak + \beta \neq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

ζ) $a_k = \frac{k^k}{(k!)^2}$

3) Υπολογίστε το άθροισμα της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$. (Υπόδειξη: τηλεσκοπική).

4) Εξετάστε αν συγκλίνει και αν συγκλίνει απόλυτα η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{k^2+2k+3}$. Ομοίως για τη σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2+1}{k^4+2k+3}$.

5) Αν $a_k \geq 0$ και $\beta_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και οι σειρές $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k$ είναι συγκλίνουσες σειρές τότε και η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\beta_k$ είναι συγκλίνουσα.

6) Εφαρμόστε τα κριτήρια λόγου και ρίζας για να βρείτε για ποια x συγκλίνει και για ποια x αποκλίνει καθεμιά από τις παρακάτω σειρές. Για τα x για τα οποία τα κριτήρια δεν εφαρμόζονται εξετάστε με άλλο τρόπο αν συγκλίνει η σειρά.

α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$ β) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$ γ) $\frac{5^k}{k!} x^k$ δ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k}$ ε) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^{\frac{3}{2}}}$ στ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{(k+1)^k} x^k$.

7) Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς. Να δειχθεί ότι η $f + g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής:

α) Με χρήση του $\varepsilon - \delta$ ορισμού.

β) Με χρήση του χαρακτηρισμού της ομοιόμορφης συνέχεις με ακολουθίες.

8) Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς.

α) Δείξτε ότι η fg δεν είναι κατ΄ ανάγκη ομοιόμορφα συνεχής.

β) Με την επιπλέον υπόθεση ότι οι f, g είναι φραγμένες, δείξτε ότι η fg είναι ομοιόμορφα συνεχής.

9) Έστω $f : [a, \beta] \to [\gamma, \delta]$ και $g : [\gamma, \delta] \to \mathbb{R}$ ώστε οι f, g να είναι συνεχείς. Δείξτε ότι η $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

10) Έστω $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός. Να δείξετε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

11) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση ώστε να υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικοί αριθμοί. Να δείξετε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

12) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και περιοδική τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής.

13) Να εξεταστεί αν είναι ομοιόμορφα συνεχής καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις.

α) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 18x + 35$ β) $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

γ) $f : [0, \frac{\pi}{3}) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \tan x$ δ) $f : [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \tan x$.

ε) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x \cos x$ στ) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \cos^5 x$.

ζ) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$, όπου $a > 0$ η) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\cos(x^2)}{x+1}$.